17 逐步淘汰原理（排容原理）

17.1 逐步淘汰原理（排容原理）

假設S是一個有限元素的集合且$S_1, S_2, \cdots, S_n$為S的n個子集合，那麼逐步淘汰原理或者稱為排容原理是說：

定理 17.1(逐步淘汰原理) 在集合S內但不屬於子集合

$$S_1, S_2, \cdots, S_n$$

的元素個數恰為

$$|S| - \sum_{1 \le i \le n} |S_i| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2}| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap S_{i_3}| + \cdots + (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n|,$$

這裡的符號$|X|$表示集合X的元素個數。

【證明】我們只需考慮任一元素$x \in S$在本定理的公式中出現的次數即可。分兩種情形討論如下：

(1) 若$x \in S$且x落在至少一個子集合S_i內，則此時可令$x \in S_{i_1}, x \in S_{i_2}, \cdots, x \in S_{i_m}$（其中$i_1, i_2, \cdots, i_m \in \{1, 2, \cdots, n\}$），但是當$i \ne i_1, i_2, \cdots, i_m$時，$x \notin S_i$。這時$x$在定理的公式中出現的總次數為

$$1 - m + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1-1)^m = 0.$$

(2) 若$x \in S$但$x \notin S_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$，則x在本定理的公式中出現的總次數為

$$1 - 0 + 0 - 0 + \cdots + 0 = 1.$$

綜合(1)，(2)證得此原理。

例題 17.1 試求 1 至 1000 中不被$2,3,5$整除的個數。

【解】令 1 至 1000 所構成的集合為 S，且令 S_2, S_3, S_5 分別為

集合 S 中 $2,3,5$ 的倍數所構成的子集合。因為

$$
\begin{aligned}
&|S_2| = 500, |S_3| = 333, |S_5| = 200,\\
&|S_2 \cap S_3| = 166, |S_3 \cap S_5| = 66, |S_2 \cap S_5| = 100,\\
&|S_2 \cap S_3 \cap S_5| = 33,
\end{aligned}
$$

根據逐步淘汰原理，所求的個數為

$$1000 - (500 + 333 + 200) + (166 + 100 + 66) - 33 = 266.$$

17.2 尤拉函數

如果 n 是一個正整數，尤拉函數 $\phi(n)$ 是指：不大於（超過）n 且與 n 互質的正整數的個數。例如

$$
\begin{aligned}
\phi(1) &= 1,\\
\phi(2) &= 1,\\
\phi(3) &= 2,\\
\phi(4) &= 2,\\
\phi(6) &= 2,\\
\phi(13) &= 12,\\
\phi(15) &= 8.
\end{aligned}
$$

為了求尤拉函數 $\phi(n)$ 的一般公式，我們先將正整數 n 因數分解成如下的標準分解式：

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_l^{n_l},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 為相異質數，$n_1, n_2, \cdots, n_l$ 為正整數。根據逐步淘汰原理，“不大於 n 且與 n 互質的正整數的個數”恰為“不大於 n 且不被 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 整除的正整數的個數”。所以得到

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n-\sum_{i=1}^{l}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le l}\frac{n}{p_i p_j}-\cdots+(-1)^l\frac{n}{p_1p_2\cdots p_l}\\ &= n\left(1-\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le l}\frac{1}{p_i p_j}-\cdots+(-1)^l\frac{1}{p_1p_2\cdots p_l}\right)\\ &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right).\end{aligned}$$

這是有名的尤拉公式。

定理 17.2(尤拉公式)　將正整數n因數分解成如下的標準分解式：

$$n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_l^{n_l},$$

其中$p_1,p_2,\cdots,p_l$為相異質數，$n_1,n_2,\cdots,n_l$為正整數，則

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)\\ &= p_1^{n_1-1}(p_1-1)p_2^{n_2-1}(p_2-1)\cdots p_l^{n_l-1}(p_l-1)\\ &= \prod_{i=1}^{l}p_i^{n_i-1}\left(p_i-1\right).\end{aligned}$$

例題 17.2　試求滿足$\phi(n)=12$的所有正整數n。

【證明】若質數$p\,|\,n$則由尤拉公式得

$$(p-1)\,|\,\phi(n)=12\Rightarrow p-1=1,2,3,4,6,12,$$

因此整除n的質數可能值為

$$2,3,5,7,13.$$

(1) 若$13\,|\,n$，則

$$\begin{cases}\phi(13)=12\\ \phi(n)=12\\ 13\,|\,n\end{cases}\Rightarrow n=13 \text{ 或 } 2\times 13.$$

(2) 若$7\mid n$，則

$$\begin{cases}\phi(7)=6\\ \phi(n)=12\\ 7\mid n\end{cases} \Rightarrow n=2^2\times 7 \text{ 或 } 3\times 7 \text{ 或 } 2\times 3\times 7.$$

(3) 若$5\mid n$，則

$$\begin{cases}\phi(5)=4\\ \phi(n)=12\\ 5\mid n\end{cases} \Rightarrow n \text{ 無解}$$

(4) 若$n=2^a\times 3^b$，則

$$12=\phi(n)=2^a\times 3^{b-1}\Rightarrow a=2,b=2\Rightarrow n=2^2\times 3^2.$$

因此

$$n=13,\ 2\times 13,\ 3\times 7,\ 2^2\times 7,\ 2^2\times 3^2,\ 2\times 3\times 7.$$

17.3 二階拉丁矩陣

這一節的目的是要舉一個逐步淘汰原理的應用。這個應用很有名，我們稱之為拉丁矩陣。

定理 17.3 如下圖：

1	2	……	n
a_1	a_2	……	a_n

數字$a_1,a_2,\cdots,a_n$滿足

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$$

且$a_i\neq i$。試問共有多少種排列方法。

【解答】將$1,2,3,\cdots,n$放入下排的方格中（即$a_1,a_2,\cdots,a_n$剛好是$1,2,\cdots,n$）的排法剛好有$n!$種。現在假設D_i代表這些排法中，$a_i=i$的方法數，$D_{12\cdots i}$代表這些排法中，

$a_1=1, a_2=2, \cdots, a_i=i$ 的方法數。容易計算得到

$$\begin{aligned} D_1 &= (n-1)!, \\ D_{12} &= (n-2)!, \\ D_{123} &= (n-3)!, \\ &\vdots \\ D_{12\cdots i} &= (n-i)!. \end{aligned}$$

根據逐步淘汰原理，我們所要算的方法數為

$$n! - \sum_{i=1}^{n} D_i + \sum_{1\le i<j\le n} D_{ij} - \cdots + (-1)^n D_{12\cdots n}.$$

計算得到

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!.$$

化簡得到

$$n! - n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right).$$

17.4 一種篩法

如果 n 是一個正整數，我們有興趣於下列集合的元素個數：

$$S_n = \{(p,q) \mid p,q \text{ 為不超過} n \text{且互質的正整數}\}.$$

事實上，古典的定理告訴我們：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

這是一則機率的估計問題：第一及第二個座標皆是不大於 n 的正整數的序對中，第一及第二個座標互質的機率是 $\frac{6}{\pi^2}$ 。

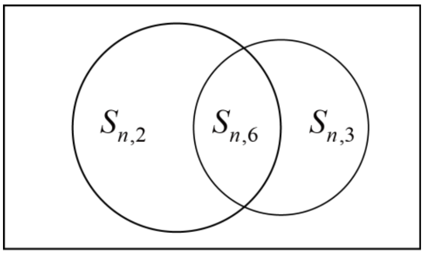
本節的主要目的是要證明：當 $n \ge 50$ 時

$$\frac{|S_n|}{n^2} < \frac{7}{10}.$$

為了證明這個不等式，我們先介紹底下的符號：

$$S_{n,2}=\{(p,q)\mid 1\le p,q\le n, 2\mid p, 2\mid q\},$$
$$S_{n,3}=\{(p,q)\mid 1\le p,q\le n, 3\mid p, 3\mid q\},$$
$$S_{n,6}=\{(p,q)\mid 1\le p,q\le n, 6\mid p, 6\mid q\},$$

並將集合的包含關係繪圖如下：



$\{(p,q)\big|1\le p,q\le n\}$

由上圖知道：集合 S_n 落在最外的區域內（可能比最外的區域還小）。因此我們有不等式：

$$\begin{aligned}|S_n| &\le n^2-(|S_{n,2}|+|S_{n,3}|)+|S_{n,6}|\\ &=n^2-([\frac{n}{2}]^2+[\frac{n}{3}]^2)+[\frac{n}{6}]^2\\ &<n^2-((\frac{n}{2}-1)^2+(\frac{n}{3}-1)^2)+\frac{n^2}{36}\\ &=\frac{2}{3}n^2+\frac{5}{3}n-2.\end{aligned}$$

所以當 $n\ge 50$ 時

$$\begin{aligned}\frac{|S_n|}{n^2} &<\frac{2}{3}+\frac{5}{3n}-\frac{2}{n^2}\\ &<\frac{2}{3}+\frac{5}{3n}\\ &\le\frac{2}{3}+\frac{5}{150}=\frac{7}{10}.\end{aligned}$$

事實上，當 $8\le n\le 50$ 時，上述不等式亦成立。

在這裡我們提出本問題的另一種證法如下（採用數學歸納法證明）：

(1) $n=8,9,10,11,12,13$ 時，容易計算得

$$|S_8|,|S_9|,|S_{10}|,|S_{11}|,|S_{12}|,|S_{13}|<\frac{7}{10}n^2.$$

(2) 現在假設對所有的正整數 k $(13 \le k < n)$ 時，

$$|S_k| < \frac{7}{10}k^2,$$

則將 n 以模 6 做分類，分成如下四大類來討論：

(a) 若 $n \equiv 0,2,4 \pmod 6$ 時，則 n 為偶數。所以

$$\begin{aligned}
|S_n| &\le |S_{n-1}| + 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)n \\
&\le \frac{7}{10}(n-1)^2 + n \\
&= \frac{7}{10}n^2 - \frac{2}{5}n + \frac{7}{10} \\
&< \frac{7}{10}n^2.
\end{aligned}$$

(b) 若 $n \equiv 1 \pmod 6$ 時，則

$$\begin{aligned}
|S_n| &\le |S_{n-1}| + 2\cdot(n-1) \\
&\le |S_{n-2}| + 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)(n-1) + 2(n-1) \\
&\le \frac{7}{10}(n-2)^2 + \frac{8}{3}(n-1) \\
&= \frac{7}{10}n^2 - \frac{2}{15}n - \frac{2}{15} \\
&< \frac{7}{10}n^2.
\end{aligned}$$

(c) 若 $n \equiv 3 \pmod 6$ 時，則

$$\begin{aligned}
|S_n| &\le |S_{n-1}| + 2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)n \\
&\le |S_{n-2}| + 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)(n-1) + \frac{4}{3}n \\
&\le \frac{7}{10}(n-2)^2 + \frac{7}{3}n - 1 \\
&= \frac{7}{10}n^2 - \frac{7}{15}n + \frac{9}{5} \\
&< \frac{7}{10}n^2.
\end{aligned}$$

(d) 若 $n \equiv 5 \pmod{6}$ 時，則

$$\begin{aligned}
|S_n| &\le |S_{n-1}| + 2(n-1) \\
&\le |S_{n-2}| + 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)(n-1) + 2(n-1) \\
&\le |S_{n-3}| + 2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)(n-2) + 3n-3 \\
&\le |S_{n-4}| + 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)(n-3) + \frac{13}{3}n - \frac{17}{3} \\
&\le \frac{7}{10}(n-4)^2 + \frac{16}{3}n - \frac{26}{3} \\
&= \frac{7}{10}n^2 - \frac{4}{15}n - \frac{38}{15} \\
&< \frac{7}{10}n^2.
\end{aligned}$$

綜合(a), (b), (c), (d)，證得本題目。

習題 17.1　試求 1 至 10000 中非 $2,3,5,7$ 的倍數的個數。

習題 17.2　設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為正數且令

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

證明 [13]

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n) \le 1 + \frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}.$$

[13] 可採用逐步淘汰原理的證明模式。

習題 17.3　試求滿足 $\phi(n) = 36$ 的所有正整數 n 。

習題 17.4　若正整數 $n \ge 19$，試求 $\phi(n)$ 的最小值。

習題 17.5　設符號$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$代表將$n$件相異物分成$k$堆（每堆至少有一件）的方法數。

(1) 計算$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}(n \geq 2)$。

(2) 證明：

$$\left\{ \begin{matrix} N \\ n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^N .$$

動手玩數學

1957 年於陝西西安市元代安西王府遺址出土。幻方鐵板上每行均由六個數字排列，組成方陣，不論縱行或橫行，或對角線上的數字，相加之和都是 111。這個蘊含著數學原理的六六幻方（魔方陣），在古代被視為奇妙的神秘之物。人們把它鄭重地裝進石函，埋入房基中，用作鎮宅和防災避邪的吉祥物。今幻方鐵板中有八個位置的數字已經無法辨識，你能幫史學家修補好這珍貴的元代幻方鐵板嗎？

28	4	3	31	35	10	元
36			24	11	1	代
7		12		22	30	幻
8				16	29	方
5	20	15	14	25	32	鐵
27	33	34	6	2	9	板

幻方鐵板的出土地點在今天西安火車站東北三公里處，是元代安西王府的遺址。安西王府是忽必烈的三兒子忙哥剌的王宮。

挑戰題

設集合S_n定義如下：

$$S_n=\{(p,q,r)\mid p,q,r \text{ 為不超過 } n \text{ 且兩兩互質的正整數}\}.$$

試證明：當$n\geq 2$時

$$|S_n|\leq \frac{3}{5}n^3.$$

卡邁克爾猜想

我們常用尤拉函數$\phi(n)$代表：不大於n且與n互質的正整數個數。例如

$$\phi(1)=1,\phi(2)=1,\phi(6)=2,\phi(4)=2,\phi(12)=4,\cdots.$$

卡邁克爾猜想是說：是否存在正整數n，使得任何不等於n的正整數m皆有$\phi(m)\neq\phi(n)$。

一般猜想這樣的正整數n是不存在的；至少在

$$n\leq 10^{10000}$$

時，這樣的正整數n是不存在的。

另一個與尤拉函數相關的猜想是這樣的：是否存在合成數（非質數）n滿足

$$\phi(n)\mid(n-1).$$